PART4　放物線と 2 接線の間の面積

例題

放物線 C: $y=x^2-x+3$ 上の 2 点 $(-1,\ 5)$，$(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l，m とする。

(1)　l，m の方程式を求めよ。

(2)　2 つの接線 l，m と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　点 $(1,\ 1)$ から放物線 $C：y=-x^2+x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

第 18 講　PART4 確認問題

点 (1，3) から放物線 C：$y=-x^2+3x$ に 2 つの接線を引く。

1　2 つの接線の方程式を求めよ。

$$y=\boxed{\text{ア}}\,x,\quad y=-x+\boxed{\text{イ}}$$

2　2 つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$S=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

PART4　放物線と 2 接線の間の面積

例題

放物線 C：$y=x^2-x+3$ 上の 2 点 $(-1,\ 5)$，$(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l，m とする。

(1)　l，m の方程式を求めよ。

(2)　2 つの接線 l，m と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2-x+3$　より　$y'=2x-1$

l の傾きは $2\cdot(-1)-1=-3$ より，l の方程式は

$y=-3(x+1)+5$　すなわち　$y=-3x+2$

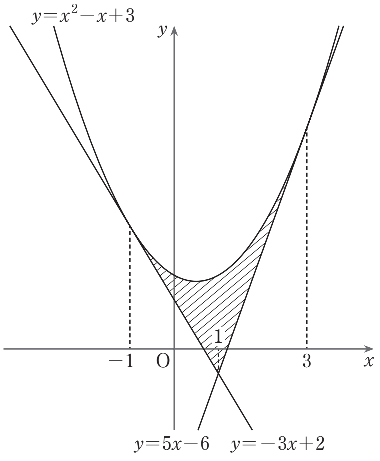
m の傾きは $2\cdot3-1=5$ より，m の方程式は

$y=5(x-3)+9$　すなわち　$y=5x-6$

(2)　l と m の交点の x 座標は

$-3x+2=5x-6$　より　$x=1$

よって，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}-0+0-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

練習

(1)　点 $(1,\ 1)$ から放物線 $C：y=-x^2+x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 つの接線と放物線 C によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2+x$ より $y'=-2x+1$

放物線 C 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ における接線の方程式は

$$y=(-2t+1)(x-t)-t^2+t \quad より \quad y=(-2t+1)x+t^2 \cdots\cdots ①$$

この直線が点 $(1,\ 1)$ を通るので

$$1=(-2t+1)\cdot 1+t^2 \qquad t^2-2t=0 \qquad t=0,\ 2$$

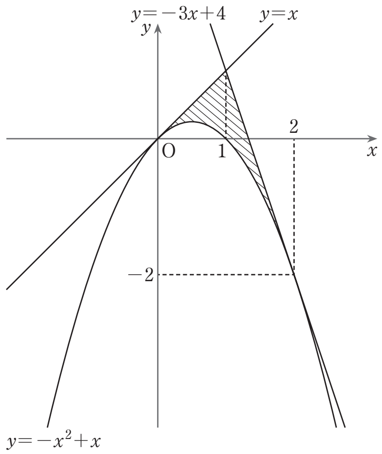
よって，①より，求める接線の方程式は

$$y=x,\ y=-3x+4$$

(2)　2 つの接線 $y=x$ と $y=-3x+4$ の交点の x 座標は

$$x=-3x+4 \quad より \quad x=1$$

よって，求める面積 S は



$$S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x-2)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=\frac{1}{3}-0+0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

第18講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：4

[解説]

$y=-x^2+3x$　より　$y'=-2x+3$

放物線 C 上の点 $(t,\ -t^2+3t)$ における接線の方程式は　[A]

$$y=(-2t+3)(x-t)-t^2+3t$$

すなわち

$$y=(-2t+3)x+t^2 \quad \cdots\cdots①$$

この直線が点 $(1,\ 3)$ を通るので

$$3=(-2t+3)\cdot 1+t^2$$

$$t^2-2t=0 \qquad t=0,\ 2$$

よって，①より，求める２つの接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=3x,\ y=-x+4}$$

[A]　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

2 [正解] ウ：2，エ：3

[解説]

点 (1，3) から放物線 C：$y=-x^2+3x$ に引いた接線の方程式は

$$y=3x,\ y=-x+4$$

である。

2 つの接線 $y=3x$ と $y=-x+4$ の交点の x 座標は

$$x=1$$ [B]

また，接点の x 座標は

$$x=0,\ 2$$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\{3x-(-x^2+3x)\}dx+\int_1^2\{(-x+4)-(-x^2+3x)\}dx$$

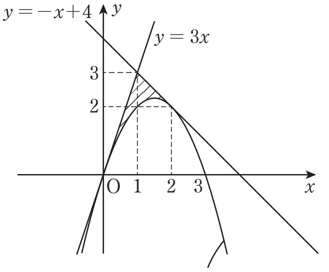
$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x-2)^2\,dx$$ [C]

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left\{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\mathbf{\frac{2}{3}}$$



[B]　2 接線 l，m の方程式と接点の x 座標，および l，m の交点の x 座標 a を求め，面積を求める部分を直線 $x=a$ で分割して計算する。

[C]

$$\int(x-\alpha)^2\,dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$$

（C は積分定数）

を利用するとよい。